

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)
3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $F(x) = cf(x)$

Έχουμε $F(x+h) - F(x) = cf(x+h) - cf(x) = c(f(x+h) - f(x))$, $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{c(f(x+h) - f(x))}{h} = c \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\text{Επομένως } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[c \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] = cf'(x)$$

Άρα $(cf(x))' = cf'(x)$.

(Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 30)

Α2. Μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και συμβολίζεται $f'(x_0)$ αν

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \epsilon \quad . \quad (\text{Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 22})$$

Α3. α) ΛΑΘΟΣ

β) ΣΩΣΤΟ

γ) ΣΩΣΤΟ

δ) ΛΑΘΟΣ

ε) ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 - 12x + 10$$

B1. $f'(x) = 6x^2 + 2ax - 12.$

B2. Αφού η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ πρέπει:

$$f'(1) = 0$$

$$\Rightarrow 6 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 2a = 6$$

$$\Rightarrow a = 3$$

B3. Για $a=3$: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 10$

και $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow 6x^2 + 6x - 12 \geq 0 \Rightarrow 6(x^2 + x - 2) \geq 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 \geq 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Πίνακας Μονοτονίας:

x		-2		1	
f'	+	○	-	○	+
f	↗		↘		↗

 Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in (-\infty, -2]$ και για κάθε $x \in [1, +\infty)$

 και η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in [-2, 1]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = -2$

το

$$f(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) + 10$$

$$\Rightarrow f(-2) = 2 \cdot (-8) + 3 \cdot 4 + 24 + 10$$

$$\Rightarrow f(-2) = -16 + 12 + 34$$

$$\Rightarrow f(-2) = 30$$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$

$$\text{το } f(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 10 \Rightarrow f(1) = 3.$$

B4. Για $\alpha = 3$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 + 6x - 12}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6(x^2 + x - 2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6(x-1) \cdot (x+2)}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} 6 \cdot (x+2) = 6 \cdot (1+2) = 6 \cdot 3 = 18 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει $\bar{x} = 14$, $x_3 = 18$ και $x_4 = 22$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i}{v} = 14$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3 + x_4 \cdot v_4}{v} = 14$$

$$\Rightarrow \frac{200 + 210 + 18 \cdot v_3 + 22 \cdot 5}{v} = 14$$

$$\Rightarrow 200 + 210 + 18 \cdot v_3 + 110 = 14v$$

$$\Rightarrow 18 \cdot v_3 + 520 = 14v$$

$$\Rightarrow 9 \cdot v_3 + 260 = 7v \quad (1)$$

Επίσης:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = v$$

$$\Rightarrow 20 + 15 + v_3 + 5 = v$$

$$\Rightarrow v_3 + 40 = v \quad (2)$$

$$\text{Από (1), (2)} \Rightarrow 9v_3 + 260 = 7 \cdot (v_3 + 40)$$

$$\Rightarrow 9v_3 + 260 = 7v_3 + 280$$

$$\Rightarrow 2v_3 = 20 \Rightarrow v_3 = \frac{20}{2} \Rightarrow \boxed{v_3 = 10}$$

Γ2.

κλάσεις [,)	x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$
[8, 12)	10	20	200
[12, 16)	14	15	210
[16, 20)	18	10	180
[20, 24)	22	5	110
Σύνολο		50	700

$$x_3 = \frac{16 + 20}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

$$x_4 = \frac{20 + 24}{2} = \frac{44}{2} = 22$$

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 20 + 15 + 10 + 5 = 50$$

$$x_3 \cdot v_3 = 18 \cdot 10 = 180$$

$$x_4 \cdot v_4 = 22 \cdot 5 = 110$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i \cdot v_i = 200 + 210 + 180 + 110 = 700$$

Γ3.

$$s^2 = \frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$$

$$= \frac{1}{50} \cdot [(10 - 14)^2 \cdot 20 + (14 - 14)^2 \cdot 15 + (18 - 14)^2 \cdot 10 + (22 - 14)^2 \cdot 5]$$

$$= \frac{1}{50} \cdot (320 + 0 + 160 + 320)$$

$$= \frac{1}{50} \cdot 800 = \frac{800}{50} = 16$$

Γ4.

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{4}{|14|} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

$$(s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4)$$

Έστω ότι το δείγμα είναι ομοιογενές

Τότε $CV < 10\%$

$$\Rightarrow \frac{2}{7} < \frac{10}{100} \Rightarrow \frac{2}{7} < \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 10 < 7 \cdot 1$$

$$\Rightarrow 20 < 7 \quad \text{Αδύνατο}$$

Άρα η αρχική υπόθεση δεν ισχύει, δηλαδή το δείγμα ΔΕΝ είναι ομοιογενές.

Δεύτερος τρόπος επίλυσης:

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{4}{|14|} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \approx 0,29$$

Δηλαδή $CV = 29\% > 10\%$

Άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

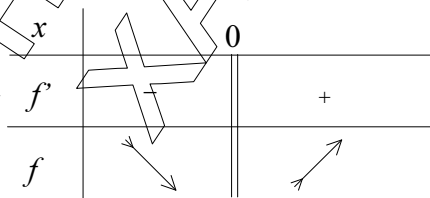
$$f(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$$

Δ1) Η f συνεχής ως ρητή και παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = -\left(-\frac{1}{x^4}\right) \cdot 2x = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

Για $x < 0$: $f'(x) < 0$

Για $x > 0$: $f'(x) > 0$



Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in (-\infty, 0)$
και η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Δ2) Για $x \in [-4, -1]$ έστω ότι ισχύει $-1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}$.

$$\text{Επειδή } f(-1) = -1 \text{ και } f(-4) = -\frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow f(-1) \leq f(x) \leq f(-4)$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in [-4, -1]$ οπότε
 $-1 \geq x \geq -4 \Rightarrow -4 \leq x \leq -1$, που ισχύει.

Δ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(1, f(1))$ είναι:

$$y = f'(x_0)x + \beta, \text{ όπου } x_0 = 1 \text{ και}$$

$$f'(1) = \frac{2}{1^3} = 2 \text{ και } f(1) = -\frac{1}{1^2} = -1.$$

$$\text{Άρα } (\varepsilon): y = 2x + \beta.$$

$$M(1, -1) \in (\varepsilon) \Rightarrow -1 = 2 \cdot 1 + \beta \Rightarrow \beta = -3.$$

$$\text{Άρα } (\varepsilon): y = 2x - 3$$

Δ4. Έχουμε: $A \in (\varepsilon) \Rightarrow y_1 = 2x_1 - 3$

$$B \in (\varepsilon) \Rightarrow y_2 = 2x_2 - 3$$

$$C \in (\varepsilon) \Rightarrow y_3 = 2x_3 - 3$$

$$\text{Είναι: } \bar{y} = 2\bar{x} - 3 \Rightarrow \bar{y} = 2 \cdot 4 - 3 \Rightarrow \bar{y} = 5 \text{ και}$$

$$s_y = |2| \cdot s_x \Rightarrow s_y = 2 \cdot 2 \Rightarrow s_y = 4$$

$$\text{Άρα } CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{4}{|5|} = \frac{4}{5} \stackrel{\cdot 20}{=} \frac{80}{100} = 80\%.$$