ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α) Ορισμός σελίδα 15

β) i. Η συνάρτηση έχει αντίστροφη όταν είναι 1-1 στο Α.

ii. Είναι η συνάρτηση $g: f(A) \to \mathbb{R}$ με την οποία για κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Η συνάρτηση αυτή g συμβολίζεται f^{-1}

Α2. Θεώρημα Fermat σελίδα 142

Α3. Θεώρημα σελίδα 135

Α4. α) Λάθος

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & x<0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$

Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x)=0$, για κάθε $x \in (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

A4. β) Λάθος. Έστω η $f(x)=\begin{cases} x-2, & x>3 \\ 5, & x=3 \end{cases}$

Είναι $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(x-2) = 1 \neq f(3)$

A5. γ)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}(e^{-x}+\lambda) = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2$

Β2. Έστω συνάρτηση g με $g(x) = f(x) - x = e^{-x} - x + 2$, $x \in [2,3]$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[2,3]$, ως πράξη συνεχών συναρτήσεων

$$\left.\begin{aligned} g(2) &= e^{-2} - 2 + 2 = e^{-2} > 0 \\ g(3) &= e^{-3} - 3 + 2 = \frac{1}{e^3} - 1 = \frac{1-e^3}{e^3} < 0 \end{aligned}\right\} g(2)\cdot g(3) < 0$$

Από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 0$

Επίσης $g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ για κάθε $x \in [2,3]$.

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα, συνεπώς είναι 1-1, οπότε για $x = x_0$ έχουμε μοναδική λύση.

B3. $f'(x) = -e^{-x} < 0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και 1-1, άρα αντιστρέψιμη

$$y = f(x) \iff y = e^{-x} + 2 \iff y - 2 = e^{-x} \underset{y>2}{\iff} -x = \ln(y-2)$$

$$\iff x = -\ln(y-2)$$

Άρα $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$, $x>2$.

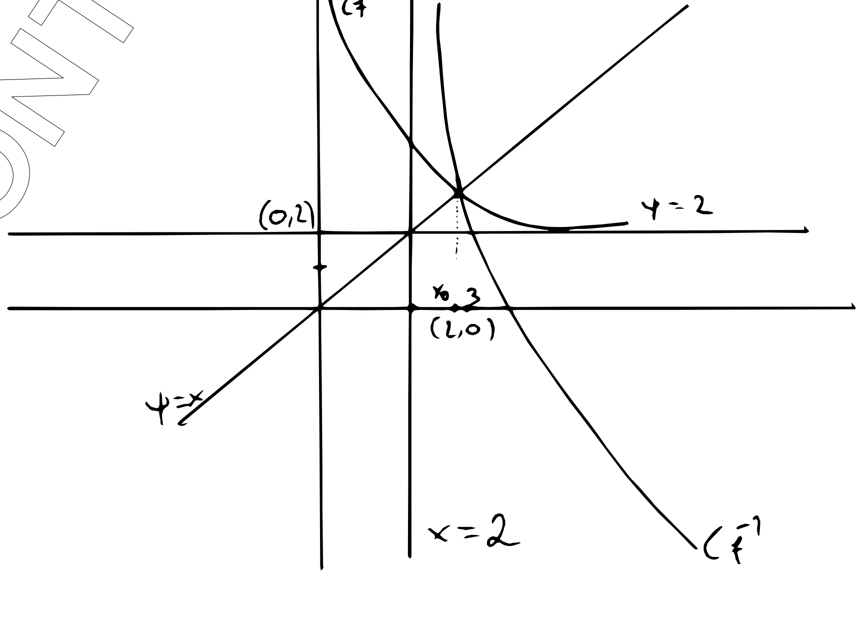
B4. Είναι $\lim\limits_{x\to 2^+} f^{-1}(x) = -\infty$ αφού εάν θέσουμε

$x-2 = u$ όταν $x \to 2^+ \Rightarrow u \to 0^+$

Άρα $\lim\limits_{x\to 2^+} f^{-1}(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} [-\ln(x-2)] = -\lim\limits_{x\to 2^+} \ln(x-2) =$

$= -\lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = +\infty$ διότι $\lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$.

Άρα η $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f



ΘΕΜΑ Γ

Γ1 $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+\beta x, & x<1 \end{cases}$

Η f συνεχής στο $x_0=1$ (ως παραγωγίσιμη). Οπότε

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ άρα $1+\beta=1+\alpha$ άρα $\alpha=\beta$ ✓

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\alpha}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\beta}{x-1}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta}{1}=\beta+1 \ ✓$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+\cancel{\alpha}-1-\cancel{\alpha}}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=2$$

Άρα $\beta+1=2$ άρα $\boxed{\beta=1}$

$\boxed{\alpha=1}$

Γ2.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+x, & x<1 \end{cases}$$

• Για $x>1$ $f'(x)=2x>0 \Rightarrow f \uparrow$ στο $[1,+\infty)$

• Για $x<1$ $f'(x)=e^{x-1}+1>0 \Rightarrow f\uparrow$ στο $(-\infty,1]$

και αφού f συνεχής στο $x_0=1$

$\Rightarrow f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$

$$f(\mathbb{R}) \overset{\uparrow}{=} \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty,+\infty)=\mathbb{R}.$$

διότι

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x-1}+x) = 0+(-\infty) = -\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1) = +\infty$

Γ3. (i) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \exists\, \kappa<0: f(\kappa)<0$

$f(0) = e^{-1} = \frac{1}{e} > 0$

Από Θ. Bolzano $\exists\, x_0 \in (\kappa, 0): f(x_0)=0$

η οποία είναι μοναδική αφού $f \uparrow$

(ii) $f^2(x) = x_0 f(x) \overset{f(x) \neq 0 \ \forall x > x_0}{\Longrightarrow}$

$f(x) = x_0$

Αδύνατη

αφού αν $x > x_0 \overset{f\uparrow}{\Longrightarrow} f(x) > f(x_0) = 0$

ενώ $x_0 < 0$.

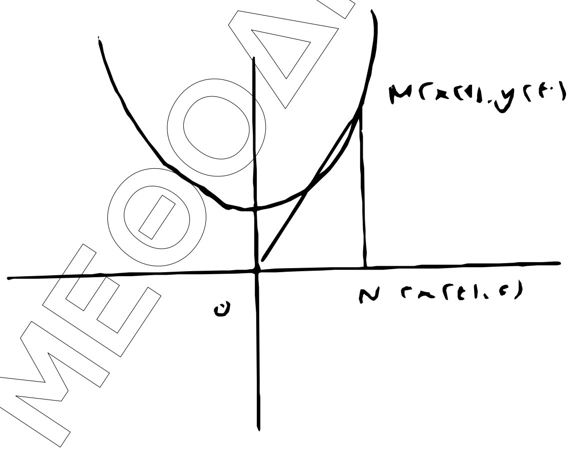
$\underline{\Gamma_4}$: $y = f(x)\,,\ x \geq 1$

$M(x(t), y(t)) \rightarrow y(t) = x^2(t)+1$

$x(t_0) = 3$

$y(t_0) = 10$

$x'(t_0) = 2$



$E(t) = \frac{1}{2} x(t) y(t)$

$E'(t) = \frac{1}{2} x'(t) y(t) + \frac{1}{2} x(t) y'(t)$ $t = t_0$

$E'(t_0) = \frac{1}{2} x'(t_0) y(t_0) + \frac{1}{2} x(t_0) y'(t_0)$

επεί $y'(t_0) = 2x(t_0)x'(t_0) = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

Άρα $E'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 + \frac{1}{2}\, 3 \cdot 12 = 10 + 18 = 28$

Θέμα 4

$\underline{\Delta_1}$ $f(x) = (x-1)\cdot \ln(x^2-2x+2) + ax+\beta$

$\varepsilon: \; y = -x+2$

$f(1) = 1 \Rightarrow a+\beta = 1$

$f'(1) = -1$

$f'(x) = \ln(x^2-2x+2) + (x-1)\dfrac{2x-2}{x^2-2x+2} + a$

$f'(1) = -1 \Rightarrow \boxed{a=-1}$ και $\boxed{\beta = 2}$

$\underline{\Delta_2}$:

$$f(x) = (x-1)\ln(x^2-2x+2) - x + 2$$

$$E = \int_1^2 \left|(x-1)\ln(x^2-2x+2) \cancel{-x+2} \cancel{+x-2}\right| dx$$

$$= \int_1^2 |(x-1)\ln(x^2-2x+2)|\, dx$$

όπου $(x-1)\cdot\ln(x^2-2x+2) \geq 0$ για κάθε $x \in [1,2]$

Θέτω $u = x^2-2x+2 \Rightarrow du = (2x-2)\,dx \Rightarrow$

$$du = 2(x-1)\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}du = (x-1)\,dx$$

Για $x=1 \rightsquigarrow u_1 = 1$

Για $x=2 \Rightarrow u_2 = 2$

$$E = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln u\, du = \frac{1}{2}\left[u\ln u\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 1\cdot du =$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}(\cancel{2}\ln 2) - \frac{1}{2}\cdot 1 = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

Δ3: (i) ΝΔο $f'(x) \ge -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{\ln(x^2-2x+2)}_{(+)} + \underbrace{\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}}_{(+)} \cancel{-1} \ge \cancel{-1} \quad \text{ισχύει}$$

(ii)

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) + \lambda \ge (\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2) + \frac{3}{2}$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) \ge (\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2) - \lambda + 2 - \frac{1}{2}$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \ge (\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2) - \lambda + 2 \Leftrightarrow$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \ge f(\lambda) \Leftrightarrow$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \ge -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

Από ΘΜΤ

$$\exists\, x_0 \in \left(\lambda, \lambda+\frac{1}{2}\right): \ f'(x_0) = \frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \ge -1$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \ge -\frac{1}{2}$$

Δ4. Παρατηρώ ότι η $y = -x+2$

είναι εφαπτομένη της C_g σε $x_0 = 0$

Πράγματι $y - g(0) = g'(0)(x-0) \Leftrightarrow$

$y-2 = -1(x-0) \Leftrightarrow y = -x+2$

Άρα έχουν κοινή εφαπτομένη

Επειδή $g'(x) = -3x^2 - 1 \leq -1$ (η ισότητα ισχύει για $x=0$)

και από Δ3 (i) $f'(x) \geq -1$

είναι $g'(x_1) \neq f'(x_2)$ $\forall$ $x_1, x_2 \neq 0$

Άρα δεν υπάρχει άλλη κοινή εφαπτομένη